Problème d'affectation entre plusieurs organisations

Laurent Gourvès[1], Jérôme Monnot[1] et Fanny Pascual[2]

[1] LAMSADE, CNRS et Université Paris-Dauphine, 75775 Paris Cedex 16, France.
{laurent.gourves, monnot}@lamsade.dauphine.fr
[2] LIP6, Université Pierre et Marie Curie, 104 avenue du Président Kennedy, 75016 Paris, France.
fanny.pascual@lip6.fr

1 Introduction

Nous étudions une situation dans laquelle plusieurs organisations ont chacune un ensemble de clients qui fournissent ou demandent chacun un produit. Chaque organisation a un profit proportionnel au montant des transactions qu'elle traite, et peut soit effectuer des transactions entre ses propres clients, soit effectuer des transactions avec une autre organisation (le profit d'une transaction entre deux organisations est alors partagé entre celles-ci). Le montant d'une transaction peut être sous forme monétaire ou bien représenter la satisfaction des deux clients impliqués dans la transaction. Notre but est de retourner une affectation acheteurs/vendeurs qui maximise le montant total des transactions effectuées, tout en respectant le fait qu'une organisation ne doit pas faire moins de profit dans la solution retournée que si elle avait effectué des transactions entre ses clients uniquement.

Le problème d'affectation multi-organisations. On considère un graphe biparti $G = (B, S; E; w)$ et q ensembles (appelés organisations) $O_1, \ldots, O_q$ formant une partition de $B \cup S$. Chaque acheteur (resp. vendeur) est représenté par un sommet de B (resp. S), $E \subseteq B \times S$ représente les transactions possibles et $w : E \to \mathbb{R}+$ représente les montants de ces transactions. On note $B_i = B \cap O_i$ et $S_i = S \cap O_i$. Un ensemble $M \subseteq E$ est une *affectation* (ou un *couplage*) si chaque sommet de $(B, S; M; w)$ a un degré d'au plus un. Soient p_s et p_b deux nombres rationnels positifs tels que $p_s + p_b = 1$. Ici p_s (resp. p_b) représente la proportion du coût de la transaction donnée à l'organisation du vendeur (resp. de l'acheteur)[3]. On suppose sans perte de généralité que $p_b \leq p_s$. Le profit de l'organisation O_i dans M, que l'on note $w_i(M)$, est alors défini de la façon suivante :

$$w_i(M) = \sum_{\{[b,s]\in M:\ (b,s)\in B_i\times S\}} p_b\, w([b,s]) + \sum_{\{[b,s]\in M:\ (b,s)\in B\times S_i\}} p_s\, w([b,s])$$

On note $\tilde{M}_i$ le couplage maximum du sous-graphe de G induit par O_i. Le *problème d'affectation multi-organisations* (noté AMO) consiste à trouver un couplage de poids maximum M de G tel que $w_i(M) \geq w_i(\tilde{M}_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$.

État de l'art. AMO est une variante du célèbre problème d'affectation (voir [3] pour un état de l'art de ce problème). En plus de sa structure combinatoire, AMO fait intervenir des organisations aux intérêts divergents : la coopération entre ces organisations peut augmenter grandement la qualité de la solution obtenue, mais une solution sera réalisable uniquement

[3] Ainsi s désigne le vendeur (seller) et b l'acheteur (buyer)

si elle ne va pas contre un intérêt local. Ceci se rapproche du domaine de la théorie des jeux non coopératifs, et plus spécialement de la notion de *prix de la stabilité* [1] dans laquelle on s'intéresse à la qualité de la meilleure solution acceptable par tous les acteurs du système.

2 Contribution

Complexité. Nous avons montré que le problème AMO est NP-difficile au sens fort dans le cas général, et qu'il est NP-difficile même dans le cas où il n'y a que deux organisations.

Dans le cas où toutes les transactions possibles ont le même coût (i.e. $w([i,j]) \in \{0,1\}$ pour tout $(i,j) \in B \times S$), le problème peut être résolu en temps polynomial. Pour cela il suffit de partir du couplage $\tilde{M} = \cup_{i=\{1,\ldots,q\}} \tilde{M}_i$ (i.e. du couplage maximum du graphe dans lequel on a retiré les arêtes partagées entre deux organisations), puis d'augmenter la taille du couplage grâce à des chemins alternés augmentants, tant que cela est possible. Le couplage obtenu est alors maximum et respecte les contraintes du problème.

Approximation. Soit APPROX l'algorithme qui consiste à chercher un couplage de poids maximum dans le graphe G dans lequel on a auparavant multiplié par p_b le poids de chaque arête reliant deux sommets d'organisations différentes. Cet algorithme retourne une solution réalisable de AMO et il est p_b-approché. Lorsque le nombre d'organisations est au moins égal à trois, nous avons montré qu'il est NP-difficile d'obtenir un algorithme $(p_b + \varepsilon)$-approché pour tout $\varepsilon > 0$. Ce résultat est obtenu en utilisant une gap-réduction.

3 Généralisations et conclusion

On propose maintenant d'introduire un degré d'"altruisme" dans le problème : afin de rendre possible une amélioration globale de la solution, une organisation O_i acceptera le couplage proposé si cela ne divise pas son profit d'un facteur supérieur à x (x étant fixé). Le problème consiste alors à trouver le couplage de poids maximum M tel que pour toute organisation O_i, $w_i(M) \geq w_i(\tilde{M}_i)/x$. En adaptant légèrement les preuves de AMO, on montre que ce problème est NP-difficile au sens fort pour tout $x < \frac{1}{p_b}$, et que l'algorithme APPROX (dans lequel on multiplie le poids des arêtes partagées par $x\,p_b$) est $(x\,p_b)$-approché.

De plus si $p_s = p_b = \frac{1}{2}$, les résultats énoncés ci-dessus dans le cas d'un graphe biparti sont également valables pour tout graphe.

Le problème AMO consiste à augmenter le plus possible le profit moyen des organisations. Il serait intéressant d'introduire des facteurs d'équité, par exemple pour retourner des solutions qui augmentent le plus également possible le profit de toutes les organisations.

Références

1. E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. M. Kleinberg, É. Tardos, T. Wexler et T. Roughgarden : The Price of Stability for Network Design with Fair Cost Allocation. Proc. of FOCS 2004, pp. 295-304.
2. M. R. Garey et D. S. Johnson : Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman and Company, New York, (1979).
3. D. W. Pentico : Assignment problems : A golden anniversary survey. EJOR, vol. 176, pp. 774-793, (2007).