
Couplage contraint et Exploration efficace d'un voisinage exponentiel pour le Problème de Tournées de Véhicules

Eric Angel, Evripidis Bampis, Fanny Pascual, Joseph Warnier

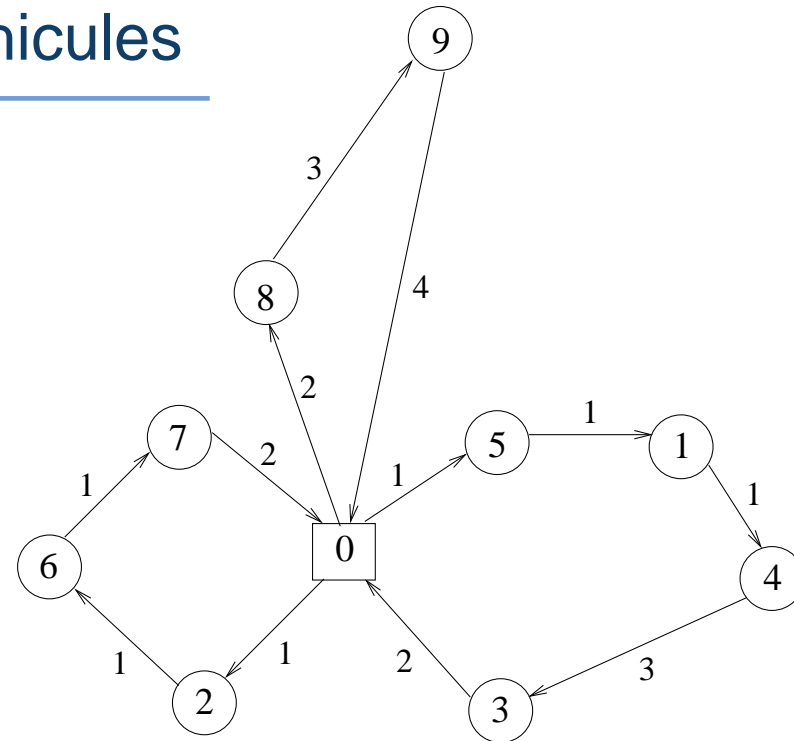
`fpascual@lami.univ-evry.fr`

LaMI, universite d'Evry Val d'Essonne

Plan de l'exposé

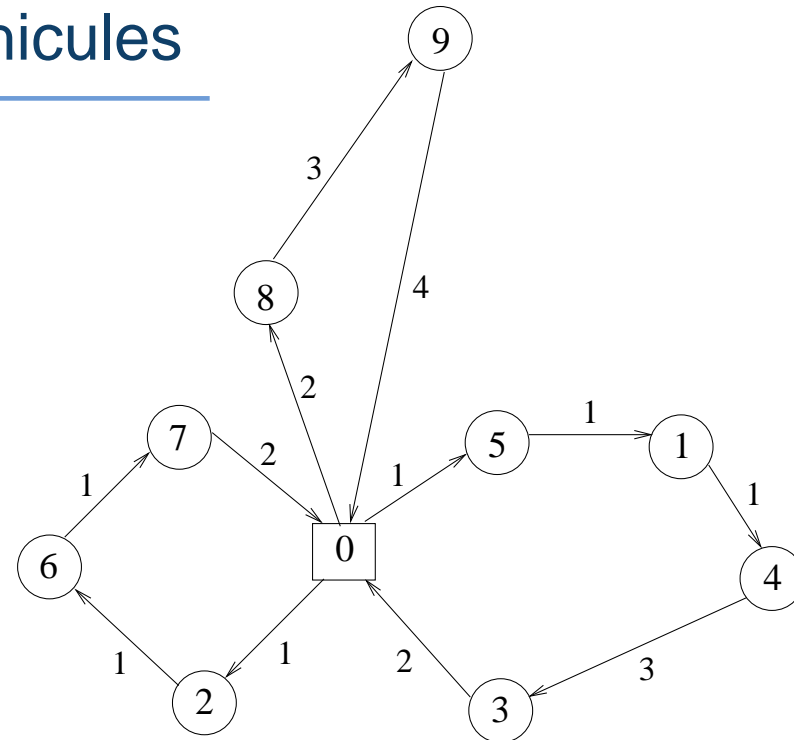
1. Cadre de travail
 - Le Problème de Tournées de Véhicules (PTV)
 - Recherche locale et voisinage exponentiels
2. Le voisinage multi-insertion
 - Définition du voisinage étudié
 - Réduction à un problème de couplage contraint
3. Polynomialité du problème de couplage contraint

Le Problème de tournées de véhicules



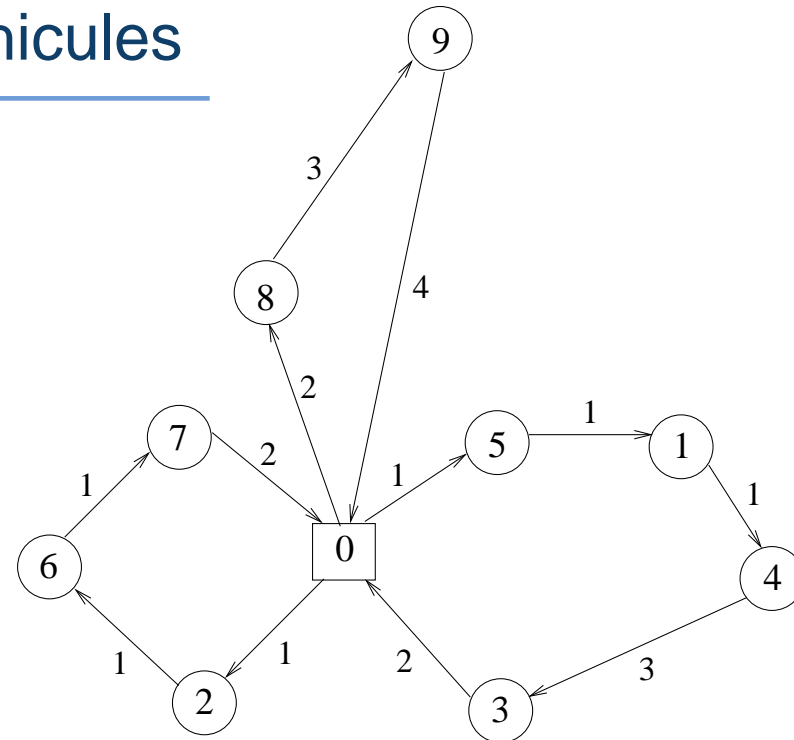
- On a : - un dépôt, n clients, un(des) véhicule(s).
- une matrice des distances.

Le Problème de tournées de véhicules



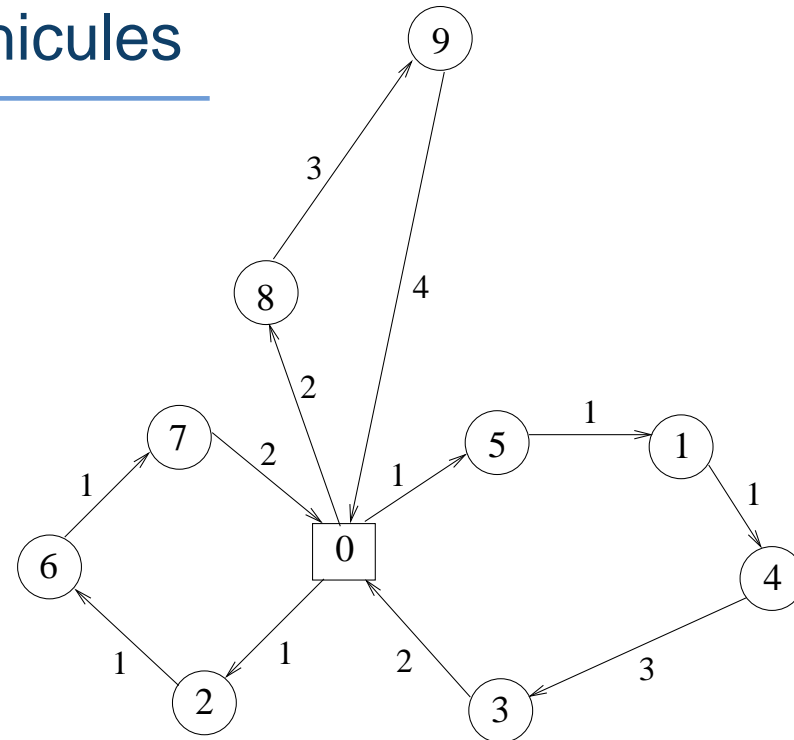
- On a : - un dépôt, n clients, un(des) véhicule(s).
- une matrice des distances.
- Un véhicule peut transporter au plus C unités de marchandise.
- Chaque client demande 1 unité de marchandise.

Le Problème de tournées de véhicules



- On a : - un dépôt, n clients, un(des) véhicule(s).
- une matrice des distances.
- Un véhicule peut transporter au plus C unités de marchandise.
- Chaque client demande 1 unité de marchandise.
- On cherche à minimiser la distance totale parcourue.

Le Problème de tournées de véhicules

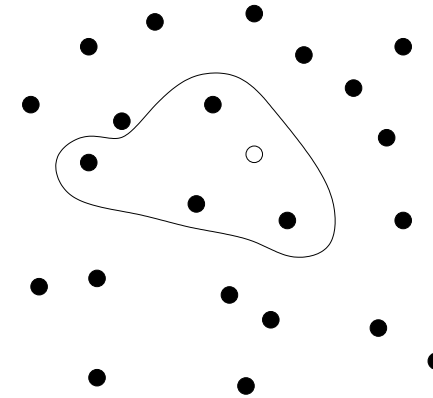


- On a : - un dépôt, n clients, un(des) véhicule(s).
- une matrice des distances.
- Un véhicule peut transporter au plus C unités de marchandise.
- Chaque client demande 1 unité de marchandise.
- On cherche à minimiser la distance totale parcourue.

⇒ Problème NP-difficile

Algorithme de recherche locale

Ensemble des solutions réalisables :



Algorithme :

- Solution courante = une solution initiale du PTV.
- Pour $i = 1, \dots, k$
Choisir la meilleure solution S voisine de la solution courante.
Solution courante = S ; $i = i - 1$.

Voisinages exponentiels

Voisinage exponentiel :

Voisinage dont le nombre de solutions est exponentiel en de la taille de l'entrée.

Problèmes étudiés :

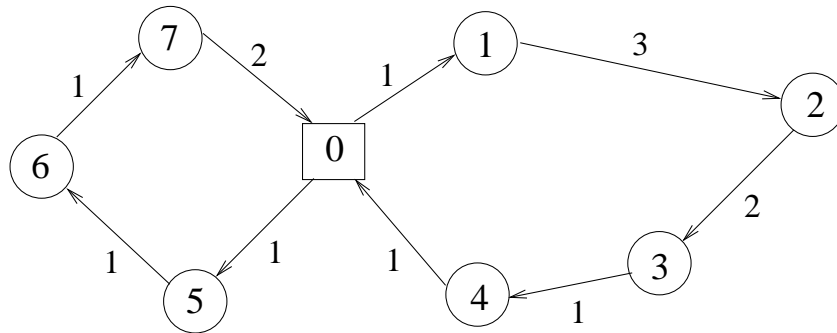
- Ordonnancement ([Congram, Potts, Van de Velde 02]; [Huring 99]); ...
- Affectation quadratique ([Deineko, Woeginger 00])
- PTV ([Ergun, Orlin, Feldman 02])
- Voyageur de commerce ([Gutin 99]; [Gutin, Yeo, Zverovitch 02]; [Gutin, Glover 05]); ...

Plan de l'exposé

1. Cadre de travail
 - Le Problème de Tournées de Véhicules (PTV)
 - Recherche locale et voisinage exponentiels
2. Le voisinage multi-insertion
 - Définition du voisinage étudié
 - Réduction à un problème de couplage contraint
3. Polynomialité du problème de couplage contraint

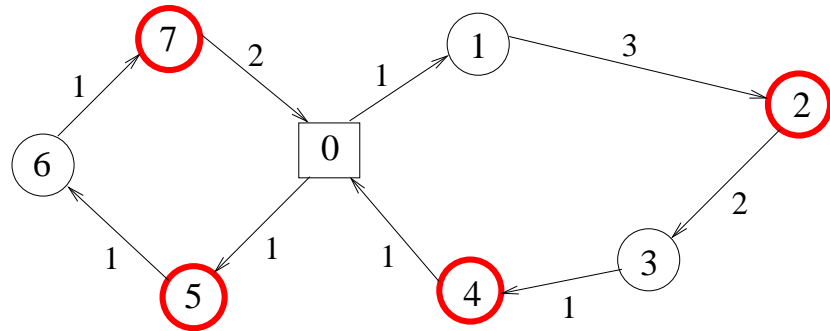
Le voisinage multi-insertion

Solution initiale :



Le voisinage multi-insertion

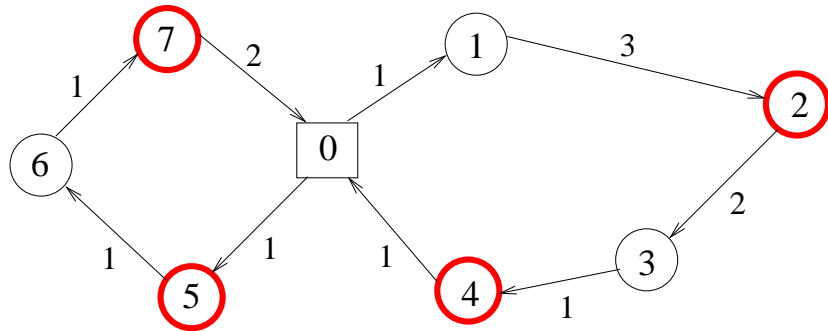
Solution initiale :



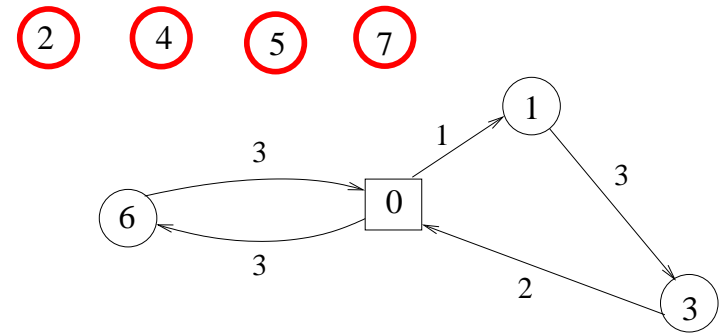
On partitionne les sommets en 2 sous-ensembles : les sommets fixes, et les sommets mobiles.

Le voisinage multi-insertion

Solution initiale :



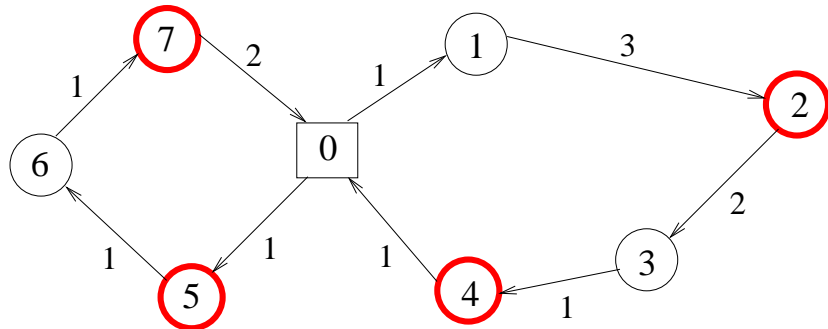
Solution intermédiaire :



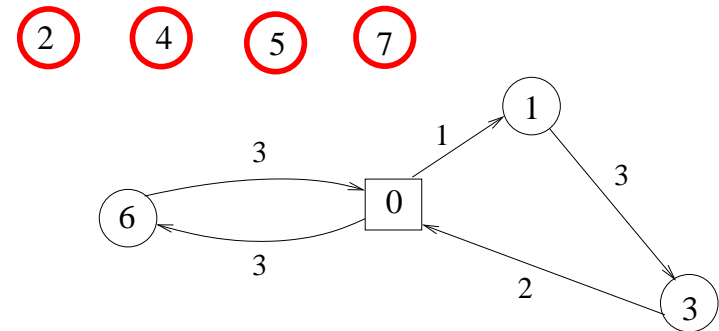
On partitionne les sommets en 2 sous-ensembles : les sommets fixes, et les sommets mobiles.

Le voisinage multi-insertion

Solution initiale :



Solution intermédiaire :



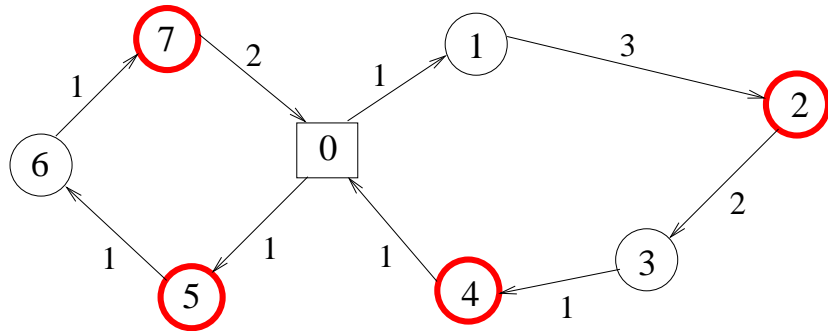
On partitionne les sommets en 2 sous-ensembles : les sommets fixes, et les sommets mobiles.

Contraintes d'insertion :

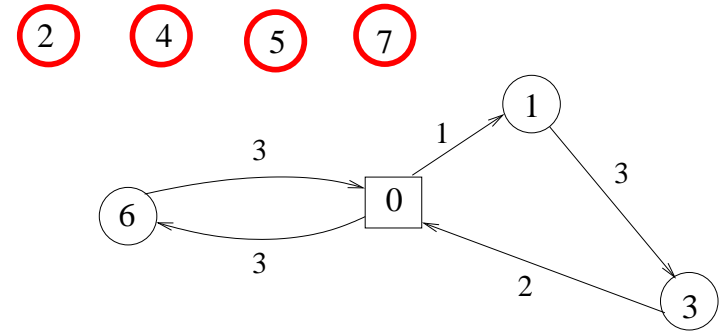
- Un sommet mobile doit être inséré une et une seule fois.
- Au plus un sommet mobile inséré entre deux sommets fixes.
- Dans la solution voisine, nombre de clients par tournée $\leq C$.

Le voisinage multi-insertion

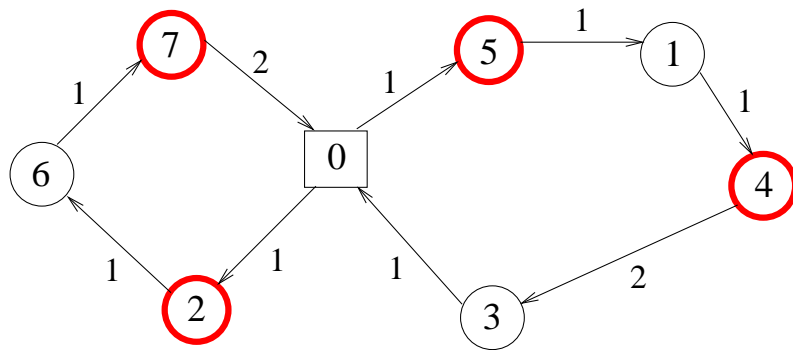
Solution initiale :



Solution intermédiaire :



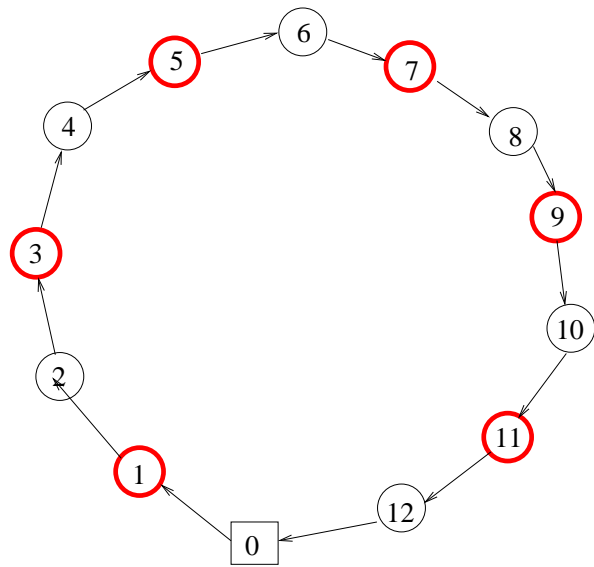
Une solution voisine :



Un voisinage exponentiel

Le nombre de solutions voisines peut être exponentiel.

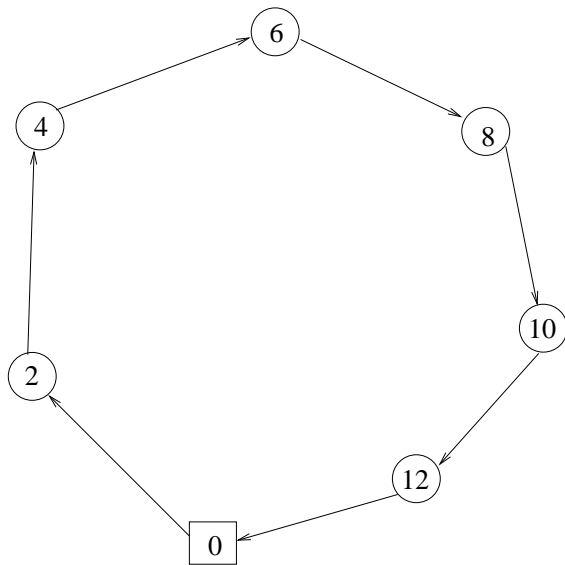
Exemple :



Un voisinage exponentiel

Le nombre de solutions voisines peut être exponentiel.

Exemple :



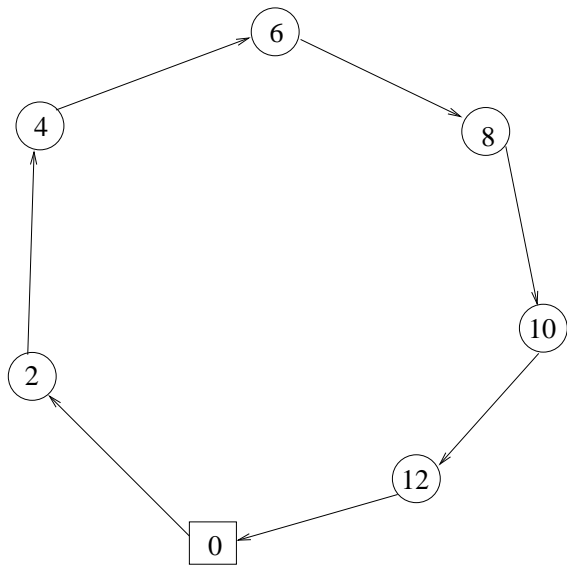
On a : $n/2$ clients fixes
 $n/2$ clients mobiles.

Nb de solutions voisines = $(n/2 + 1)!$

Un voisinage exponentiel

Le nombre de solutions voisines peut être exponentiel.

Exemple :

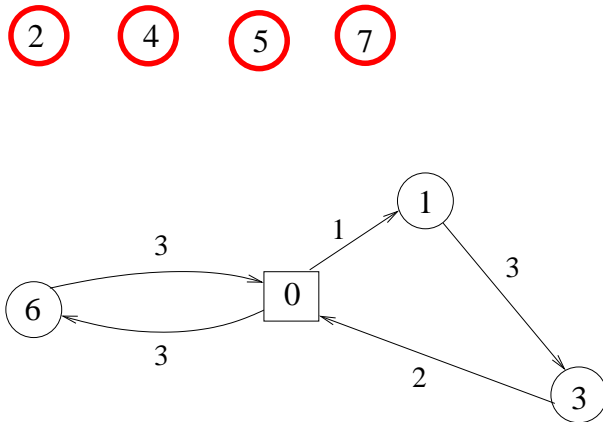


On a : $n/2$ clients fixes
 $n/2$ clients mobiles.

Nb de solutions voisines = $(n/2 + 1)!$

But : Explorer ce voisinage en un temps polynomial.

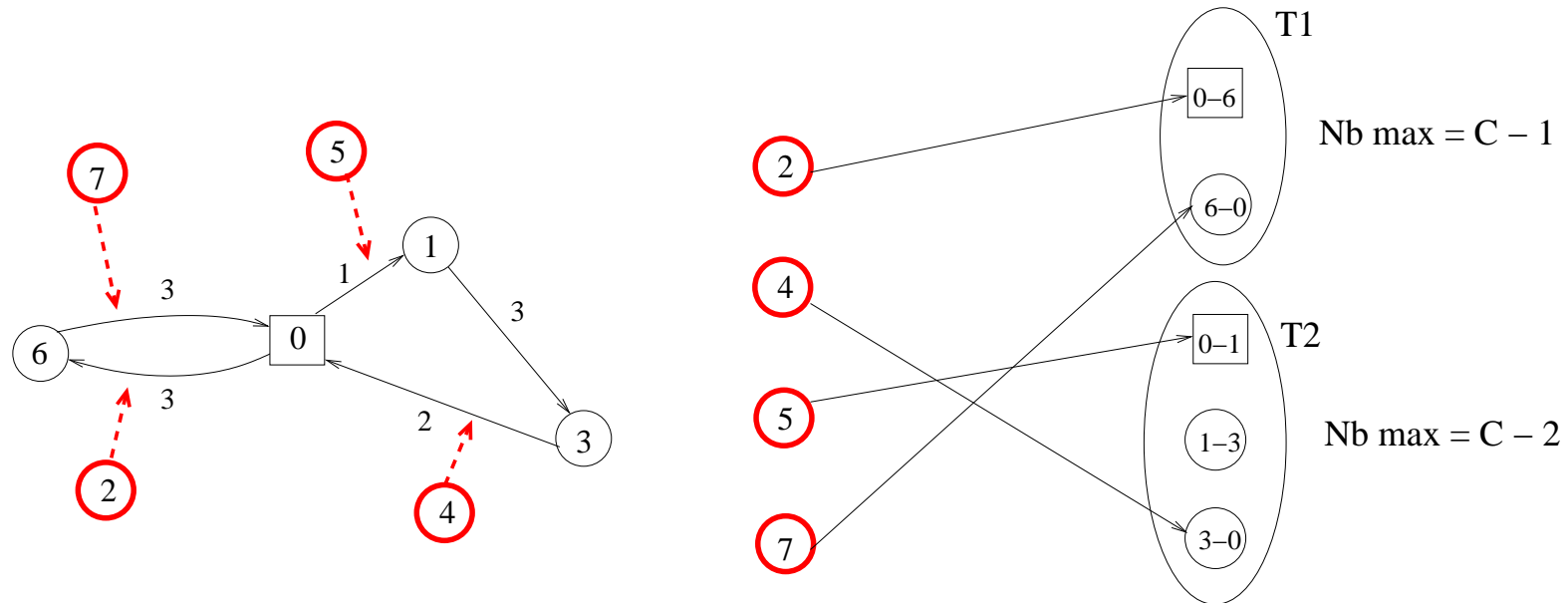
Réduction à un problème de couplage contraint



Contraintes d'insertion :

- Un sommet mobile doit être inséré une et une seule fois.
- Au plus un sommet mobile inséré entre deux sommets fixes.
- Dans la solution voisine, nombre de clients par tournée $\leq C$.

Réduction à un problème de couplage contraint

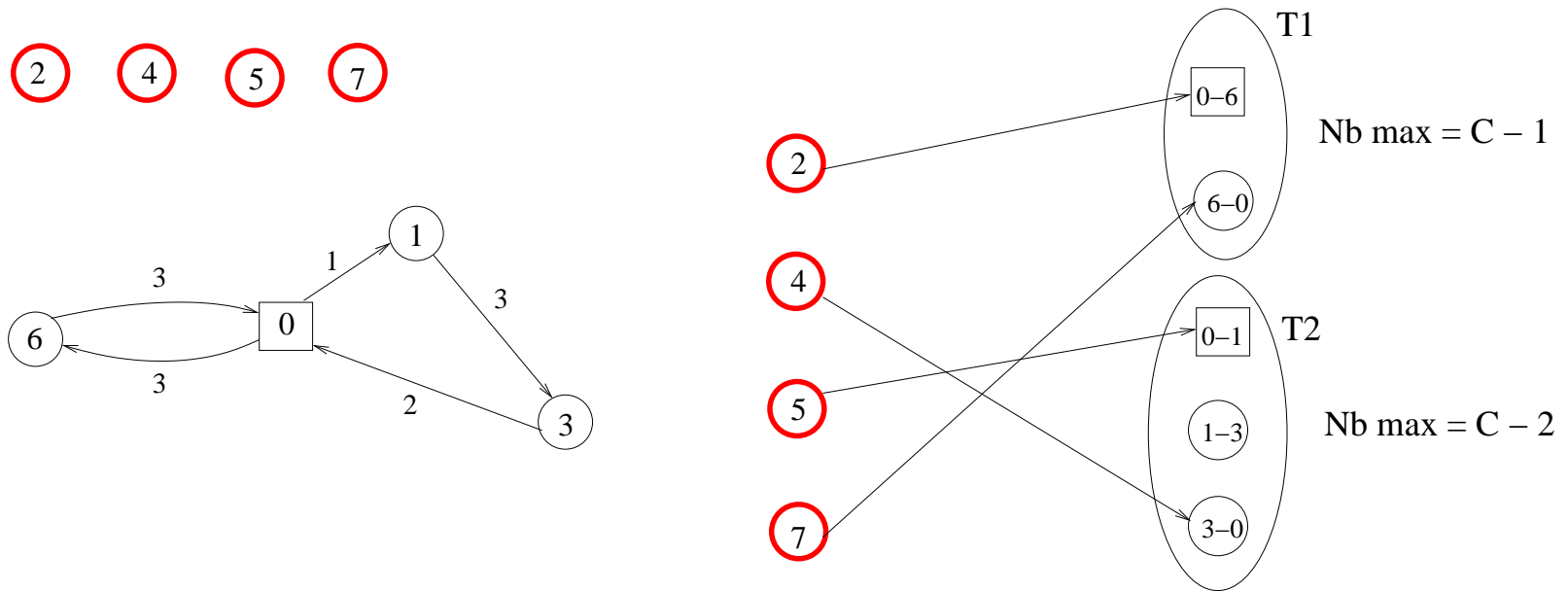


Contraintes d'insertion :

- Un sommet mobile doit être inséré une et une seule fois.
- Au plus un sommet mobile inséré entre deux sommets fixes.
- Dans la solution voisine, nombre de clients par tournée $\leq C$.

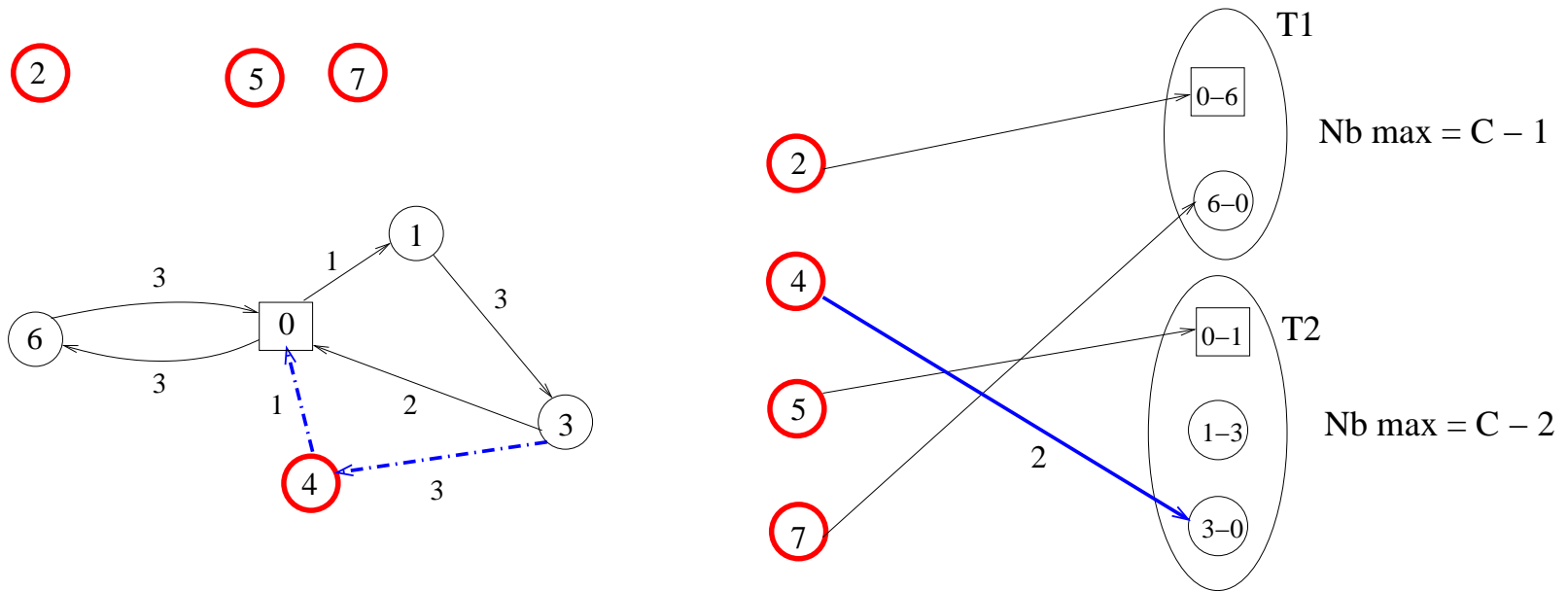
Réduction à un problème de couplage contraint

Comment trouver la meilleure solution voisine ?



Réduction à un problème de couplage contraint

Comment trouver la meilleure solution voisine ?

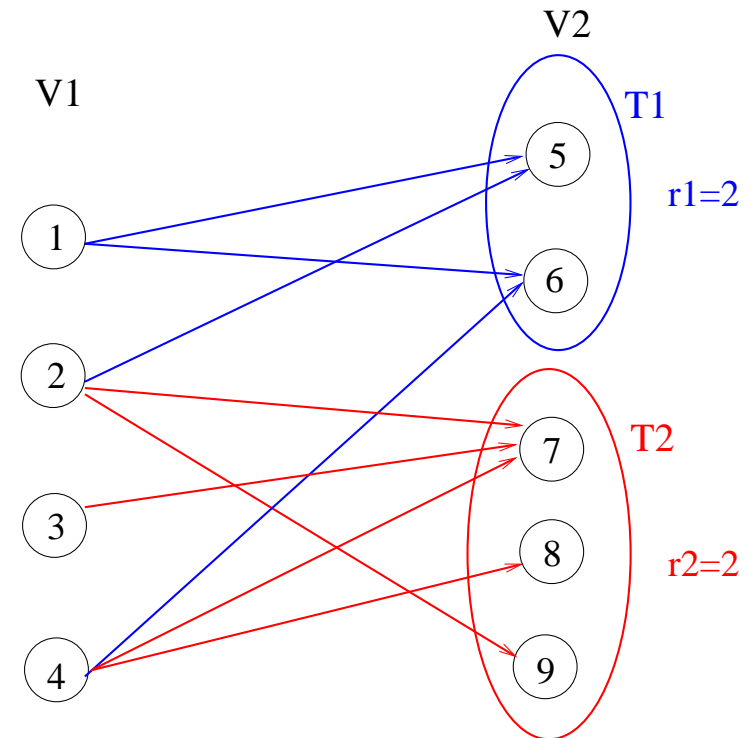


Problème de couplage contraint

Instance :

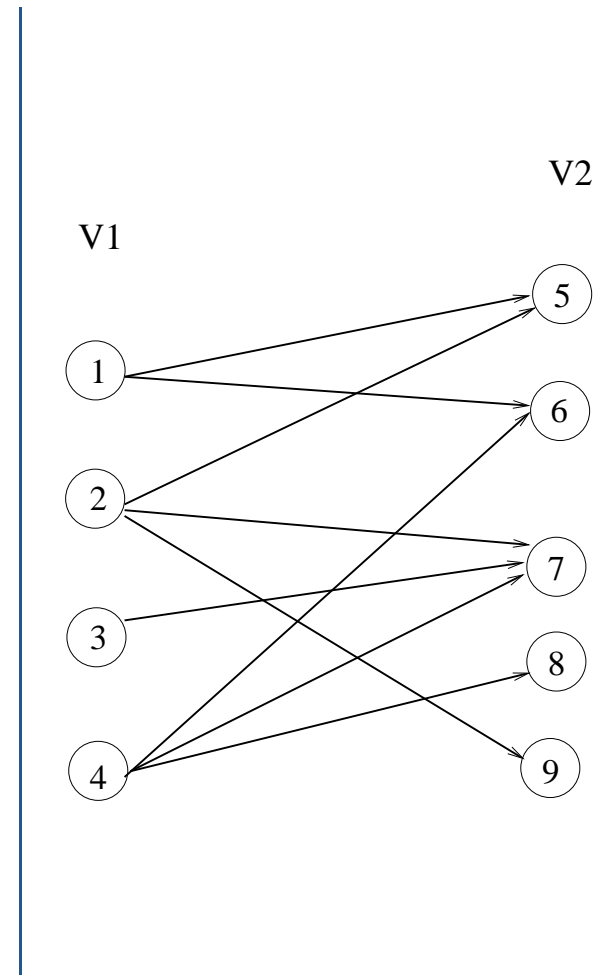
- $G = (V_1, V_2, E)$ un graphe biparti complet valué sur ses arêtes.
- $\{T_1, \dots, T_k\}$ une partition de V_2 .
- $\{r_1, \dots, r_k\}$ un ensemble d'entiers positifs.

Question : Trouver dans G un couplage complet M de poids minimum t. q. pour chaque $i = 1, \dots, k$, le nombre d'arêtes de M ayant une extrémité dans T_i est $\leq r_i$.



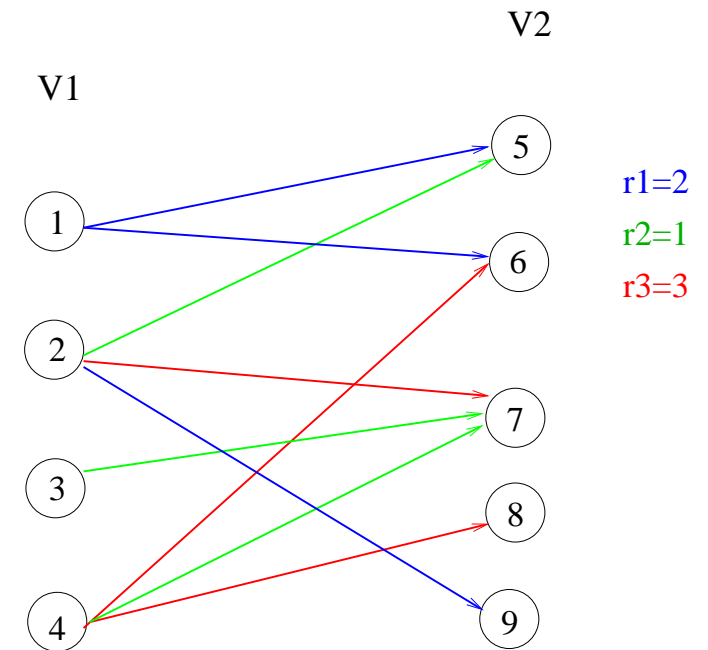
Couplages complets (CC) dans des graphes bipartis

- Pas de contraintes ; arêtes pondérées.
CC de poids min \Rightarrow Polynomial



Couplages complets (CC) dans des graphes bipartis

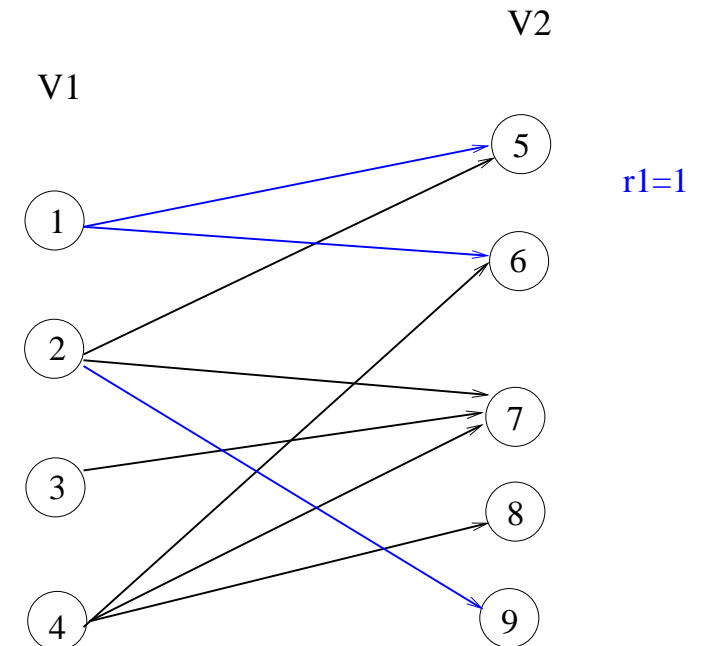
- Pas de contraintes ; arêtes pondérées.
CC de poids min \Rightarrow Polynomial
- E_1, \dots, E_k : sous-ensembles de E ,
 r_1, \dots, r_k : entiers.
Pas de pondération sur les arêtes.
CC M t.q. $|M \cap E_j| \leq r_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}$
 \Rightarrow NP-difficile



Couplages complets (CC) dans des graphes bipartis

- Pas de contraintes ; arêtes pondérées.
CC de poids min \Rightarrow Polynomial
- E_1, \dots, E_k : sous-ensembles de E ,
 r_1, \dots, r_k : entiers.
Pas de pondération sur les arêtes.
CC M t.q. $|M \cap E_j| \leq r_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}$
 \Rightarrow NP-difficile
Si $k = 1 \Rightarrow$ Polynomial
Si $k = 2 \Rightarrow$ Inconnu

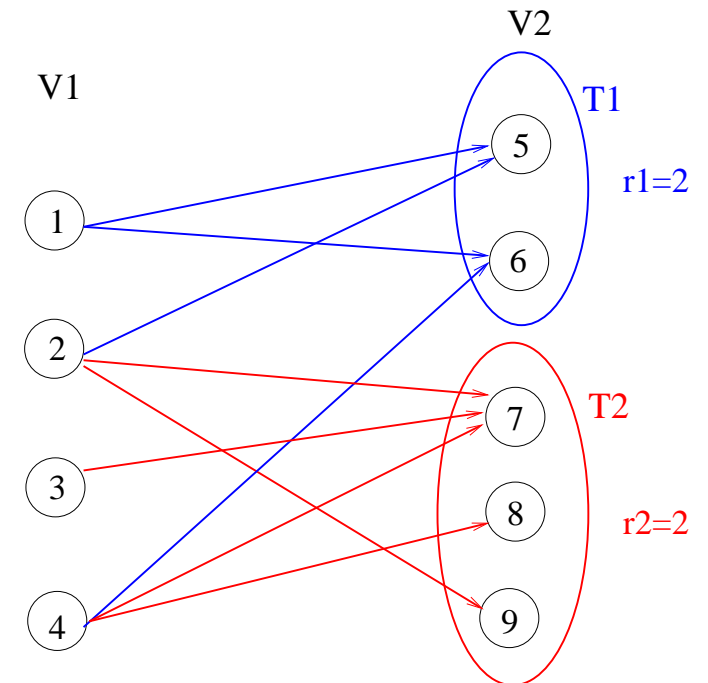
[Itai, Rodeh, Tanimoto : *Some matching problems for bipartite graphs*. Journal of the ACM, 1978]



Couplages complets (CC) dans des graphes bipartis

- Pas de contraintes ; arêtes pondérées.
CC de poids min \Rightarrow Polynomial
- E_1, \dots, E_k : sous-ensembles de E ,
 r_1, \dots, r_k : entiers.
Pas de pondération sur les arêtes.
CC M t.q. $|M \cap E_j| \leq r_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}$
 \Rightarrow NP-difficile
Si $k = 1 \Rightarrow$ Polynomial
Si $k = 2 \Rightarrow$ Inconnu

[Itai, Rodeh, Tanimoto : *Some matching problems for bipartite graphs*. Journal of the ACM, 1978]



Plan de l'exposé

1. Cadre de travail
 - Le Problème de Tournées de Véhicules (PTV)
 - Recherche locale et voisinage exponentiels
2. Le voisinage multi-insertion
 - Définition du voisinage étudié
 - Réduction à un problème de couplage contraint
3. Polynomialité du problème de couplage contraint

Problème de couplage contraint : PLNE

Programme linéaire en nombres entiers (PLNE) :

$$\text{Minimiser } \sum_{[v,w] \in E} c_{vw} x_{vw}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{w \in V, [v,w] \in E} x_{vw} = 1 \quad \forall v \in V_1$$

$$\sum_{v \in V, [v,w] \in E} x_{vw} \leq 1 \quad \forall w \in V_2$$

$$\sum_{[v,w] \in E_i} x_{vw} \leq r_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$x_{vw} \in \{0; 1\} \quad \forall [v, w] \in E.$$

Polynomialité du problème de couplage contraint

Théorème 1 :

Un PLNE est polynomial si sa matrice des contraintes est totalement unimodulaire.

Matrice des contraintes :

	e_1	...	e_i	...	e_m
S_1	1	...	1	...	0
...
S_n	0	...	1	...	1
S_{E1}	0	...	1	...	0
...
S_{Ek}	0	...	1	...	1

Polynomialité du problème de couplage contraint

Théorème 2 :

S'il existe une bipartition (F_1, F_2) de l'ensemble des sous-ensembles S_i qui vérifie pour tout $j \in \{1, 2\}$:

$$\forall S, S' \in F_i, \text{ soit } S \subseteq S', \text{ soit } S' \subseteq S, \text{ soit } S \cap S' = \emptyset,$$

alors la matrice est totalement unimodulaire.

Matrice des contraintes :

	e_1	...	e_i	...	e_m
S_1	1	...	1	...	0
...
S_n	0	...	1	...	1
S_{E1}	0	...	1	...	0
...
S_{Ek}	0	...	1	...	1

Conclusion, Perspectives

Conclusion

Voisinage exponentiel qui peut être exploré en un temps polynomial.

Perspectives

- Choix des sommets fixes / mobiles.
- Partie expérimentale.
- Autre version du PTV.